

Représentations des PROS libres

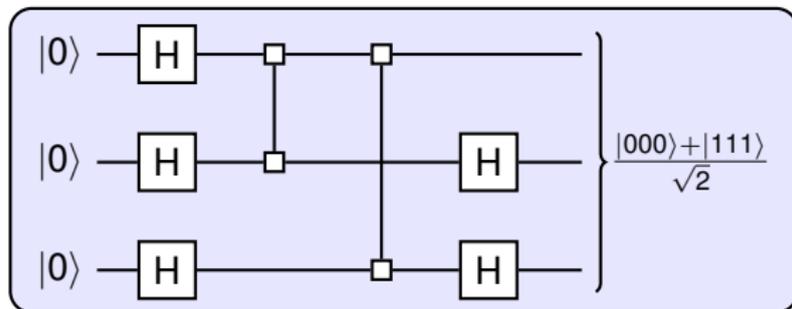
Jean-Gabriel Luque

October 18, 2017

Journée commune Normandie Mathématiques / NormaSTIC

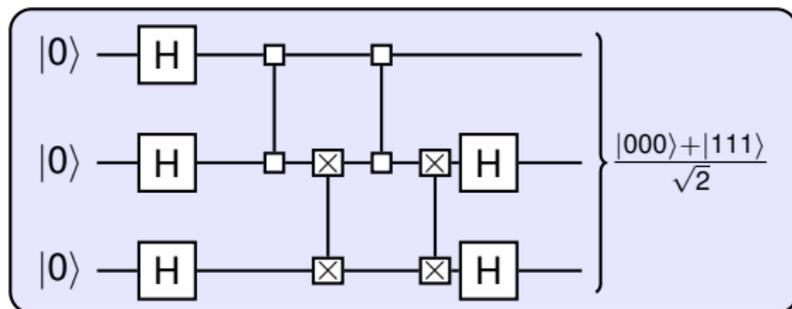
Exemple 1: Circuits Quantiques

Un circuit engendrant un état intriqué $|GHZ\rangle$ à partir d'un état factorisé $|000\rangle$



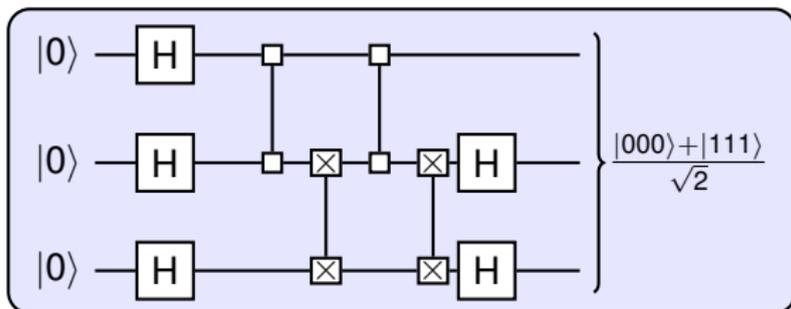
Exemple 1: Circuits Quantiques

Un circuit engendrant un état intriqué $|GHZ\rangle$ à partir d'un état factorisé $|000\rangle$



Exemple 1: Circuits Quantiques

Un circuit engendrant un état intriqué $|GHZ\rangle$ à partir d'un état factorisé $|000\rangle$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 010 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 110 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 111 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: Circuits Quantiques

Portes quantiques

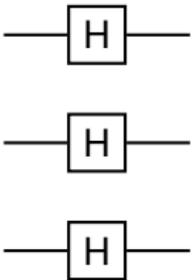
$$\text{---} \boxed{\text{H}} \text{---} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{\otimes} \text{---} \\ | \\ \text{---} \boxed{\otimes} \text{---} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{\square} \text{---} \\ | \\ \text{---} \boxed{\square} \text{---} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: Circuits Quantiques

Portes quantiques et produit de Kronecker



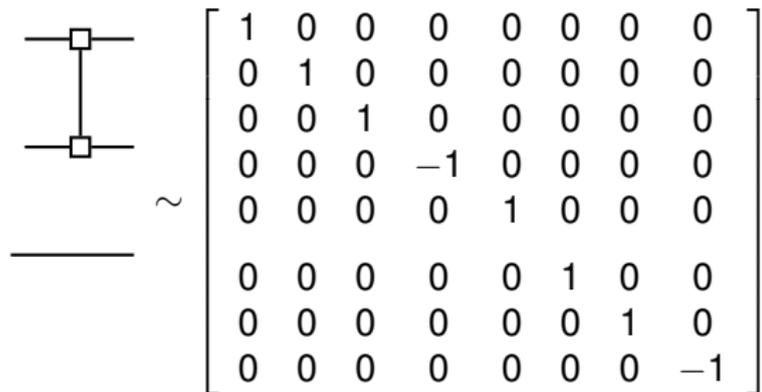
A quantum circuit diagram consisting of three horizontal lines, each representing a qubit. Each line contains a square box labeled 'H', representing a Hadamard gate. The gates are connected in series from top to bottom.

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2^3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: Circuits Quantiques

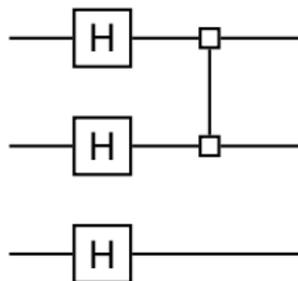
Portes quantiques et produit de Kronecker


$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: Circuits Quantiques

Portes quantiques et produit matriciel



$$\frac{1}{\sqrt{2^3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: Circuits Quantiques

Une remarque

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{\odot 3} \left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$=$$
$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{\odot 2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \right) \odot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Exemple 2: Représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb

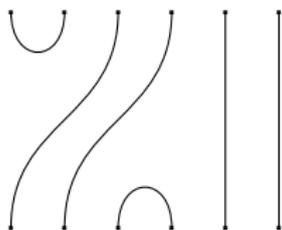
Définition formelle

\mathcal{TL}_n est engendrée par les éléments $\mathfrak{u}_i^{(n)}$ pour $1 \leq i \leq n - 1$ soumis aux relations

1. $\mathfrak{u}_i^{(n)} \mathfrak{u}_j^{(n)} = \mathfrak{u}_j^{(n)} \mathfrak{u}_i^{(n)}$ pour $|i - j| > 1$,
2. $\mathfrak{u}_i^{(n)} \mathfrak{u}_{i+1}^{(n)} \mathfrak{u}_i^{(n)} = \mathfrak{u}_i^{(n)}$,
3. $\mathfrak{u}_{i+1}^{(n)} \mathfrak{u}_i^{(n)} \mathfrak{u}_{i+1}^{(n)} = \mathfrak{u}_{i+1}^{(n)}$,
4. $(\mathfrak{u}_i^{(n)})^2 = d \mathfrak{u}_i^{(n)}$.

Exemple 2: Représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb

Représentation graphique



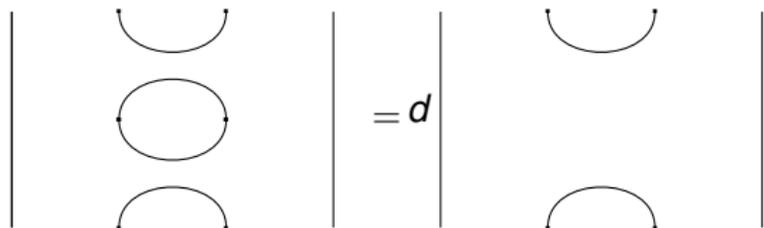
$$\mathfrak{U}_i^{(n)} = \underbrace{\cdots}_{i-1 \times} \cup \underbrace{\cdots}_{n-i-1 \times} \text{ Produit} \Rightarrow \text{on écrit le second diagramme}$$

sous le premier, on relie puis on étire les cordes et enfin on remplace chaque boucles par le symbole d .

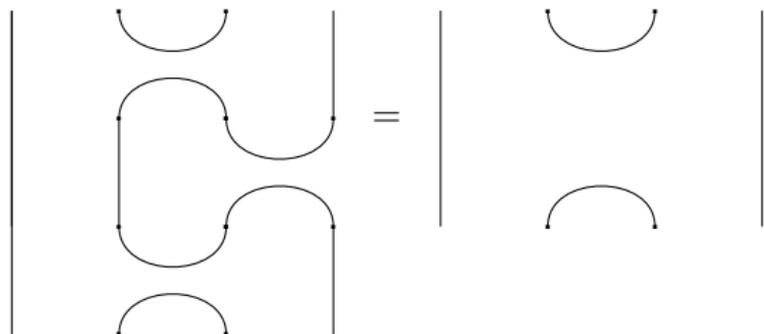
Exemple 2: Représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb

Représentation graphique

$\mathfrak{U}_2^{(4)} \mathfrak{U}_2^{(4)}$:



$\mathfrak{U}_2^{(4)} \mathfrak{U}_3^{(4)} \mathfrak{U}_2^{(4)}$:



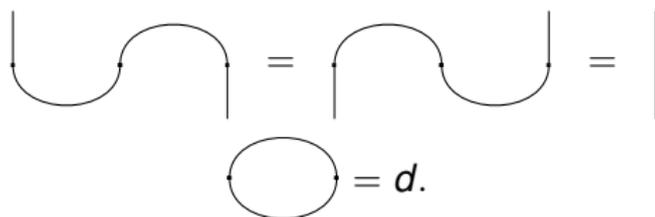
Exemple 2: Représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb

Remarque

Chaque diagramme est composé de 3 types d'éléments



qui peuvent être soit juxtaposés, soit placés les un aux dessus des autres, reliés puis simplifiés en utilisant une des règles graphiques:



Exemple 2: Représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb

Représentation linéaire

Branchement d'un diagramme sous un autre \sim produit matriciel

Juxtaposition de deux diagrammes \sim produit de Kronecker.

Il suffit donc de trouver des matrices (vecteurs) M_U et M_\cap satisfaisant:

$$(Id \odot M_U)(M_\cap \odot Id) = (M_U \odot Id)(Id \odot M_\cap) = Id$$

et

$$M_\cap M_U = d$$

Exemple 2: Représentations de l'algèbre de Temperley-Lieb

Représentation linéaire

Branchement d'un diagramme sous un autre \sim produit matriciel

Juxtaposition de deux diagrammes \sim produit de Kronecker.

Il suffit donc de trouver des matrices (vecteurs) M_U et M_\cap satisfaisant:

$$(Id \odot M_U)(M_\cap \odot Id) = (M_U \odot Id)(Id \odot M_\cap) = Id$$

et

$$M_\cap M_U = d$$

Par exemple

$$M_\cap = \begin{pmatrix} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ 2-d & 0 & d-2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M_U = \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2-d} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

permettent d'obtenir des représentations de l'algèbre \mathcal{TL}_n en dimension 2^n .

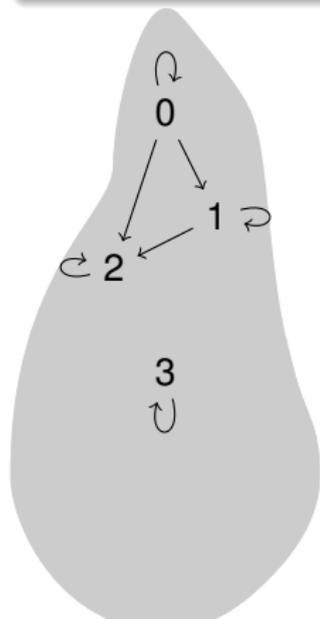
Qu'est-ce qu'un PRO?

Des structures algébriques abstraites provenant de la théorie des catégories

Définies par Mac Lane (1965) pour comprendre des problèmes d'homotopie.

Définition

Un PRO est une catégorie monoïdale stricte dont les objets sont les entiers positifs et le produit tensoriel est la somme des entiers.



- ▶ Les éléments du PRO sont les flèches (morphismes $Hom(m, n)$,
- ▶ Les flèches se composent \circ :
 $Hom(m, n) \times Hom(n, p) \rightarrow Hom(m, p)$,
- ▶ Il y a au moins une flèche $n \rightarrow n$ pour tout n qui jouent le rôle de l'identité,
- ▶ Les flèches se "tensorisent"
 $\otimes : Hom(m, n) \times Hom(m', n') \rightarrow Hom(m + m', n + n')$,
- ▶ ...

Qu'est-ce qu'un PRO?

Définition combinatoire

Un PRO est un ensemble gradué $\mathcal{P} = \bigcup_{m,n} \mathcal{P}_{m,n}$ muni de deux opérations \leftrightarrow et \Downarrow tel que

- ▶ $(\mathcal{P}, \leftrightarrow)$ est un monoïde (il est associatif et possède un élément neutre Id_0),
- ▶ \Downarrow est une opération graduée $\mathcal{P}_{m,n} \times \mathcal{P}_{n,p} \rightarrow \mathcal{P}_{m,p}$ associative.
- ▶ Pour tout n , $(\mathcal{P}_{n,n}, \Downarrow)$ est un monoïde. En particulier, il possède un neutre noté Id_n ,
- ▶ $Id_n = \overbrace{Id_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow Id_1}^{n \times}$,
- ▶ Lorsque les deux opérations sont autorisées, on a

$$\begin{array}{ccc} a & a' & a \leftrightarrow a' \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ b & b' & b \leftrightarrow b' \end{array} .$$

Un PRO sur les hypermatrices

Soit \mathbb{K} un demi-anneau commutatif et $N, p, q \in \mathbb{N}$, $N > 0$. On pose

$$\mathbb{K}(N, m, n) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{a} \\ \mathbb{J} \end{pmatrix}_{\mathbb{I} \in [N]^m, \mathbb{J} \in [N]^n} : \begin{matrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{a} \\ \mathbb{J} \end{matrix} \in \mathbb{K} \right\}$$

avec le cas particulier $\mathbb{K}(N, 0, 0) := \mathbb{K}$. On munit

$\mathbb{K}(N) = \prod_{m,n} \mathbb{K}(N, m, n)$ de deux lois \leftrightarrow et \Downarrow :

- Pour $A \in \mathbb{K}(N, m, n)$ et $B \in \mathbb{K}(N, n, p)$,

$$\begin{matrix} A \\ \Downarrow \\ B \end{matrix} = AB = \left(\sum_{\mathbb{K} \in [N]^n} \begin{matrix} \mathbb{I} & \mathbb{K} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbb{K} & \mathbb{J} \end{matrix} \right)_{\mathbb{I} \in [N]^m, \mathbb{J} \in [N]^p} \in \mathbb{K}(N, m, p).$$

- Pour $A \in \mathbb{K}(N, m, n)$ et $B \in \mathbb{K}(N, m', n')$,

$$A \leftrightarrow B = A \odot B = \left(\begin{matrix} \mathbb{I}[1, \dots, m] & \mathbb{I}[m+1, \dots, m+m'] \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbb{J}[1, \dots, n] & \mathbb{J}[n+1, \dots, n+n'] \end{matrix} \right)_{\mathbb{I} \in [N]^{m+m'}, \mathbb{J} \in [N]^{n+n'}}.$$

Un PRO sur les hypermatrices

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \updownarrow \\ \mathbf{B} \end{array} = \left[\begin{array}{cccc|ccc|cccc} 1111 & 1112 & 1121 & 1122 & \cdots & 1111 & 1112 & 1121 & 1122 \\ a\ b + & a\ b + & a\ b + & a\ b + & & a\ b + & a\ b + & a\ b + & a\ b + \\ 1111 & 1211 & 2111 & 2211 & & 1122 & 1222 & 2122 & 2222 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ 2211 & 2212 & 2221 & 2222 & \cdots & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ a\ b + & a\ b + & a\ b + & a\ b + & & a\ b + & a\ b + & a\ b + & a\ b + \\ 1111 & 1211 & 2111 & 2211 & & 1122 & 1222 & 2122 & 2222 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1111 & 1111 & 1111 & 1111 & \cdots & 1111 & 1111 & 1111 & 1111 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1111 & 1112 & 1121 & 1122 & & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ \hline 1112 & 1112 & 1112 & 1112 & \cdots & 1112 & 1112 & 1112 & 1112 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1111 & 1112 & 1121 & 1122 & & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ \hline 1121 & 1121 & 1121 & 1121 & \cdots & 1121 & 1121 & 1121 & 1121 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1111 & 1112 & 1121 & 1122 & & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ \hline 1122 & 1122 & 1122 & 1122 & \cdots & 1122 & 1122 & 1122 & 1122 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1111 & 1112 & 1121 & 1122 & & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ \hline \vdots & & & & \ddots & & & & \\ 2211 & 2212 & 2221 & 2222 & \cdots & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1111 & 1111 & 1111 & 1111 & & 2211 & 2211 & 2211 & 2211 \\ \hline 2211 & 2212 & 2221 & 2222 & \cdots & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1112 & 1112 & 1112 & 1112 & & 2212 & 2212 & 2212 & 2212 \\ \hline 2211 & 2212 & 2221 & 2222 & \cdots & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1121 & 1121 & 1121 & 1121 & & 2221 & 2221 & 2221 & 2221 \\ \hline 2211 & 2212 & 2221 & 2222 & \cdots & 2211 & 2212 & 2221 & 2222 \\ a\ b & a\ b & a\ b & a\ b & & a\ b & a\ b & a\ b & a\ b \\ 1122 & 1122 & 1122 & 1122 & & 2222 & 2222 & 2222 & 2222 \end{array} \right]$$

Un PRO sur les hypermatrices

Théorème

$\mathbb{K}(N)$ est un PRO.

En particulier, $Id_1 = I_N$ et $Id_0 = 1$.

PRO libre

Définition

Soit $X = \bigcup_{m,n} X_{m,n}$ un ensemble bigradué. On dit que le PRO $\mathcal{F}(X)$ est libre sur X si il existe un morphisme d'ensemble gradué $i : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tel que tout morphisme d'ensemble gradué $\phi : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{P}$, où \mathcal{P} est un PRO se complète en un morphisme de PRO $\bar{\phi} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{P}$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathcal{P} \\ i \uparrow & \nearrow \phi & \\ X & & \end{array}$$

Un tel PRO (lorsqu'il existe) est défini à un isomorphisme près.

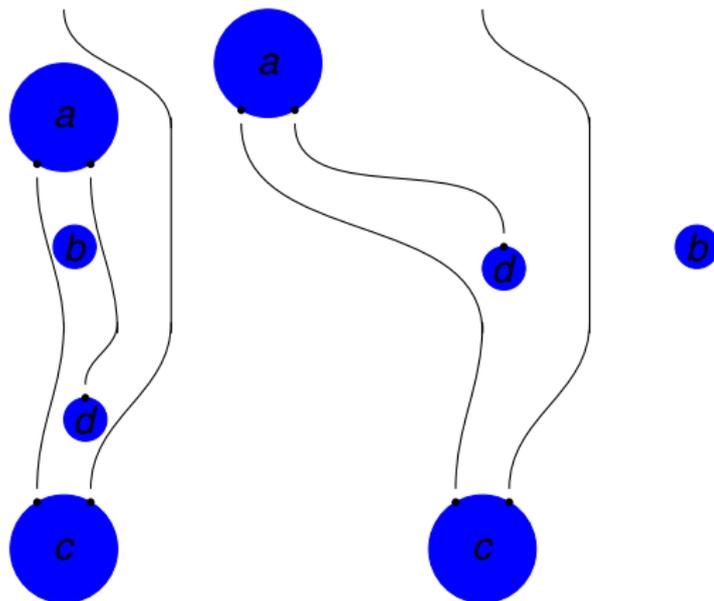
PRO libre

Vers une définition combinatoire...

Pb avec les éléments "bouchés". Par exemple

$$\begin{array}{c} \perp \\ \updownarrow \\ \top \end{array} = \perp \leftrightarrow \top = \top \leftrightarrow \perp. \text{ Une bonne définition combinatoire des PRO}$$

libres doit prendre en compte des notions d'isotopie:

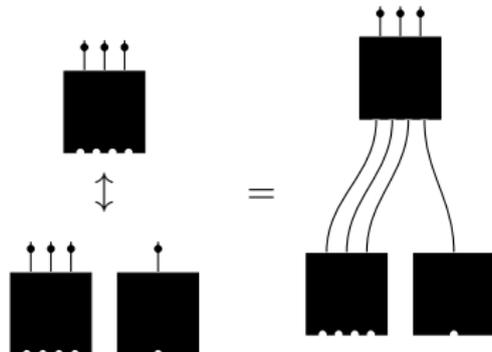
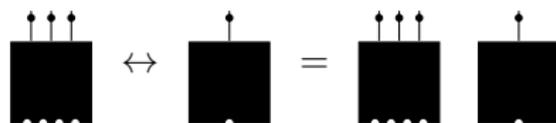


PRO libre

PRO des circuits

Si $X_{0,n} = X_{m,0} = \emptyset$ quelque soit m et n , c'est plus facile!

Le PRO libre a une description combinatoire sous forme de circuits et il existe des formes normales permettant de comparer les combinaisons d'opérations (Christophe Cordero travail en cours).

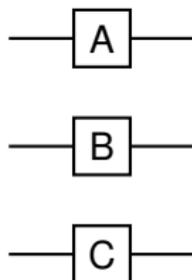


Retour sur l'exemple 1

Qu'est-ce que l'intrication?

De façon non formelle: toute connaissance sur l'une des particules entraîne une connaissance sur toute ou une partie du reste du système.

Cela signifie que le niveau d'intrication n'est pas modifié par l'action d'un circuit du type:



Chaque matrice agit indépendamment sur chaque particule.

Retour sur l'exemple 1

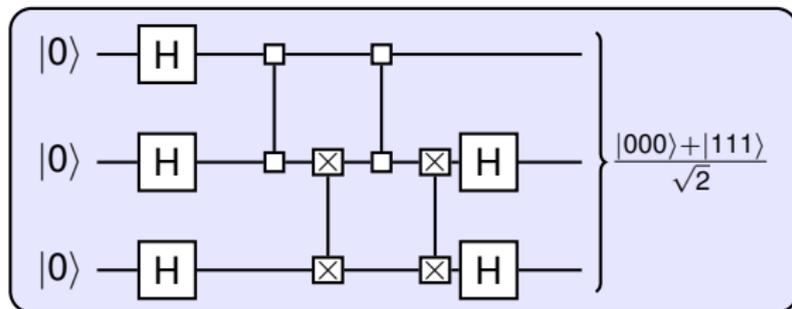
Classification des systèmes de 3 bits quantiques:

Un système de 3 bits quantiques est équivalent à l'un des systèmes suivants:

- ▶ Complètement factorisé $|000\rangle$
- ▶ Partiellement factorisé
 - ▶ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle)$
 - ▶ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |101\rangle)$
 - ▶ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |110\rangle)$
- ▶ $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$
- ▶ $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ (Greenberger-Horne-Zeilinger)

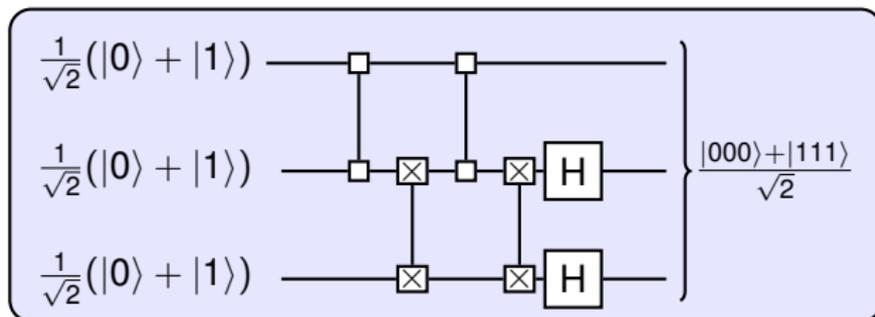
Retour sur l'exemple 1

Simplification



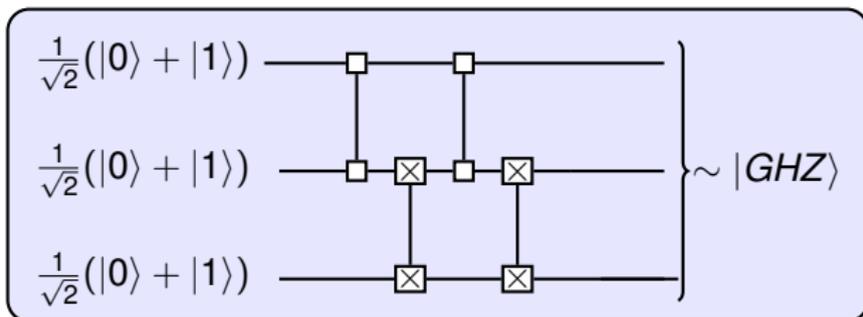
Retour sur l'exemple 1

Simplification



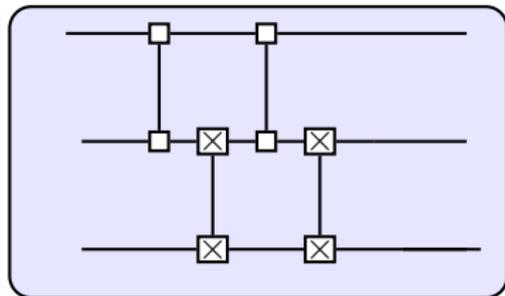
Retour sur l'exemple 1

Simplification



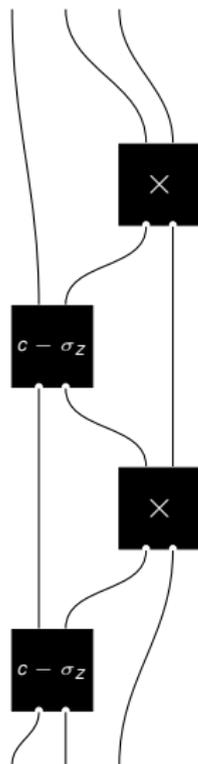
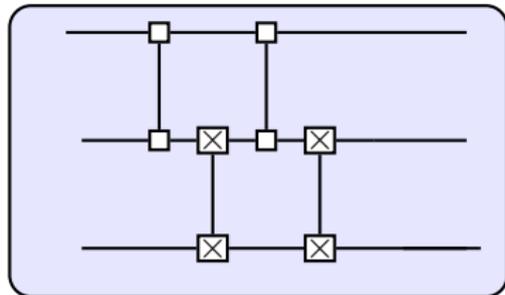
Retour sur l'exemple 1

Dans le formalisme des PRO-Graphes



Retour sur l'exemple 1

Dans le formalisme des PRO-Graphes



Retour sur l'exemple 1

Dans le formalisme des PRO-Graphes

Représentation du PRO libre engendré par les deux éléments

$$\times \quad \text{et} \quad c - \sigma_z$$

de degré (2, 2) définie par

$$\mu \left(\begin{array}{c} \times \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mu \left(\begin{array}{c} c - \sigma_z \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Retour sur l'exemple 1

Émergence de l'intrication

La composante de multidegré $(3, 3)$ s'envoie sur un groupe fini de 48 matrices.

On peut tester exhaustivement quels types d'intrication on peut atteindre depuis

$$\frac{1}{\sqrt{2^3}}(|0\rangle + |1\rangle)^3.$$

Retour sur l'exemple 1

Émergence de l'intrication

La composante de multidegré $(3, 3)$ s'envoie sur un groupe fini de 48 matrices.

On peut tester exhaustivement quels types d'intrication on peut atteindre depuis

$$\frac{1}{\sqrt{2^3}}(|0\rangle + |1\rangle)^3.$$

On peut atteindre les états factorisés, partiellement factorisés, complètement intriqués ($\sim |GHZ\rangle$) MAIS AUCUN équivalent à $|W\rangle$.

Retour sur l'exemple 1

Questions

1. Peut-on interpréter ce résultat de façon géométrique?
2. Peut-on trouver un ensemble de générateurs donnant tous les types d'intrications en gardant la propriété d'avoir un groupe fini?
Remarque: ajouter un générateur H rend le groupe infini mais (à priori) n'apporte rien du point de vue de l'intrication.
3. Que se passe-t-il pour les systèmes plus gros? Est-ce que l'on peut toujours atteindre $|GHZ\rangle$ en utilisant cette représentation? Peut-on décrire les états intriqués atteints?
4. Conjecture pour n qubits, le groupe est fini et d'ordre $2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$ (orientations acycliques de graphes A011266).
5. Peut-on se passer du groupe symétrique?

Retour sur l'exemple 2

Dans le formalisme des PRO

PRO engendré par trois éléments

$$\begin{array}{|c|} \hline \cup \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \cap \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array}$$

de degré respectif $(2, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, 0)$.

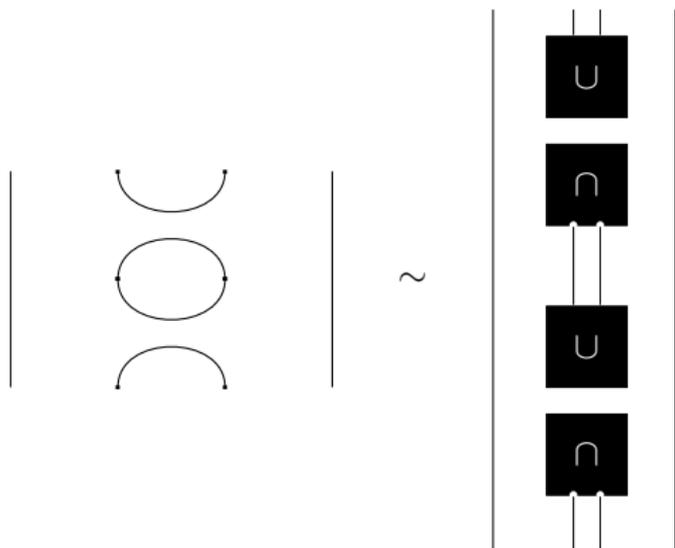
La représentation est définie par:

$$\mu \left(\begin{array}{|c|} \hline \cup \\ \hline \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 21 & 22 \\ 2-d & 0 & d-2 & 1 \end{bmatrix}, \mu \left(\begin{array}{|c|} \hline \cap \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{l} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{2-d} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{et } \mu \left(\begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array} \right) = d.$$

Retour sur l'exemple 2

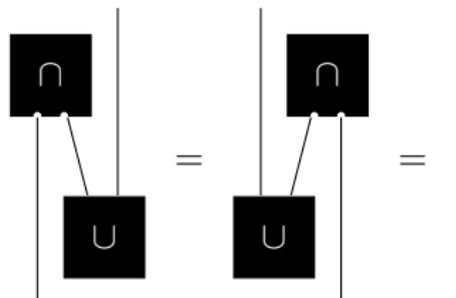
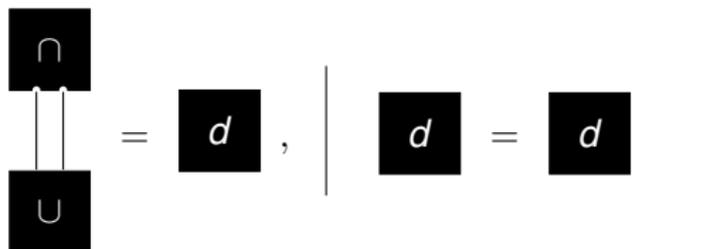
Dans le formalisme des PRO



Retour sur l'exemple 2

Notion de quotient

En ajoutant les relations:



+ la compatibilité avec les compositions, on fabrique un nouveau PRO $\mathcal{TL} = \mathcal{F}/\equiv$ appelé PRO-quotient.

La représentation μ donne directement une représentation de \mathcal{TL} .

Retour sur l'exemple 2

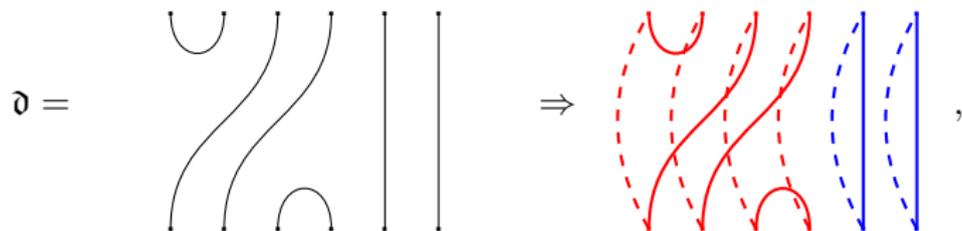
Notion de caractère

- ▶ Dans le cadre des groupes et des monoïdes, caractère=trace d'une représentation linéaire.
- ▶ Si \mathcal{P} est un PRO, chaque $(\mathcal{P}_{n,n}, \updownarrow, Id_n)$ est un monoïde.
- ▶ Chaque représentation μ de \mathcal{P} donne une représentation du monoïde $\mathcal{P}_{n,n}$ dont on peut calculer la trace.

Rappel: la trace est invariante par permutation circulaire. Elle ne dépend donc que de l'écriture des éléments de $\mathcal{P}_{n,n}$ sur un cylindre.

Retour sur l'exemple 2

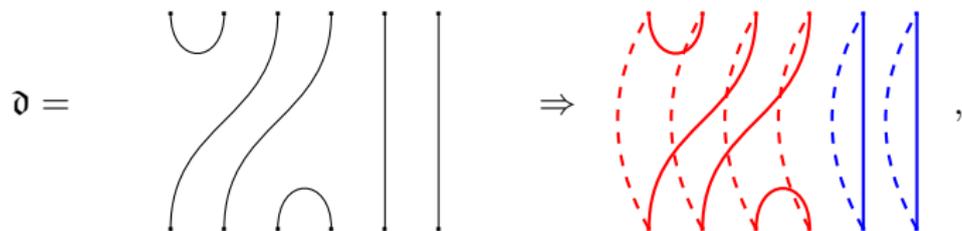
Notion de caractère



$$\text{tr}(\mu(\partial)) = d^1 2^2$$

Retour sur l'exemple 2

Notion de caractère



$$\text{tr}(\mu(\vartheta)) = d^1 2^2$$

De façon plus générale on a (conjecture) pour tout élément ϑ et toute représentation μ de dimension N :

$$\text{tr}(\mu(\vartheta)) = d^{\bullet} N^{\bullet}$$

Retour sur l'exemple 2

Questions:

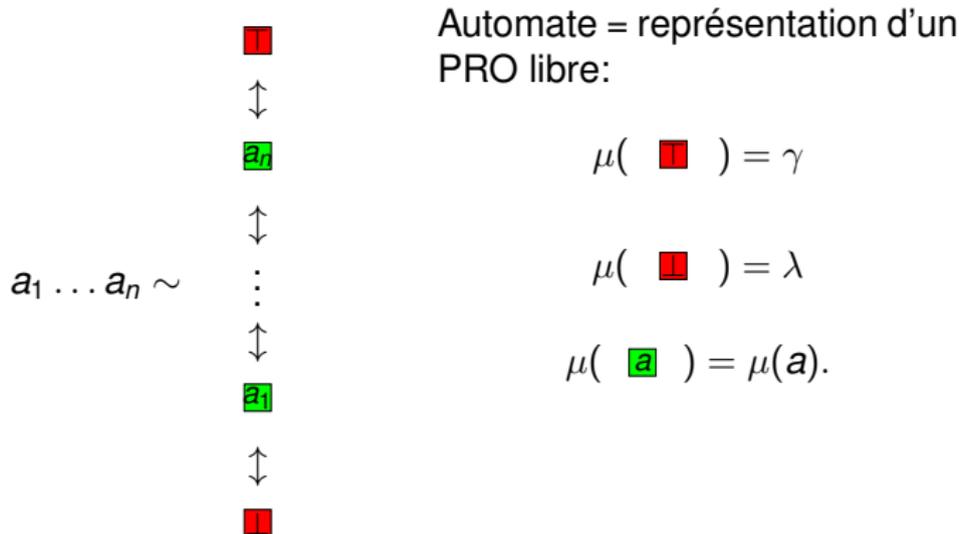
- ▶ Est-ce que l'on peut obtenir des représentations fidèles des monoïdes?
- ▶ Peut-on comprendre les caractères de ces représentations en utilisant des objets combinatoires?
- ▶ Quelles sont leurs décompositions en représentations irréductibles?
- ▶ Même question pour les groupes symétriques, groupes de tresses etc.

Exemple 3: Automates et PROs

Automates de mots

Automate de mots: (λ, μ, γ) avec $\lambda \in \mathbb{K}^{1 \times n}$, $\mu : \sigma^* \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ (morphisme) et $\gamma \in \mathbb{K}^{n \times 1}$.

Un mot peut être interprété comme un élément d'un PRO libre



Exemple 3: Automates et PROs

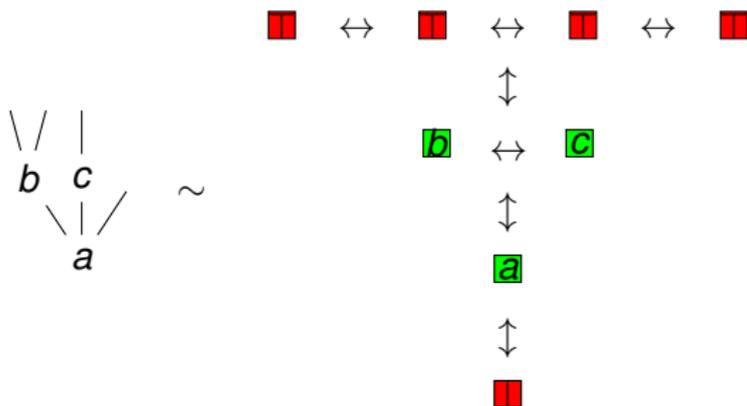
Automates d'arbres

Automaton (Bottom up), nuplet: $A = (Q, \Sigma, \delta, F)$

- ▶ Q ensemble finis d'états,
- ▶ $\Sigma = \cup_k \Sigma^{(k)}$ alphabet gradué
- ▶ $\delta : \Sigma(Q) \rightarrow 2^Q$ une fonction de transition avec

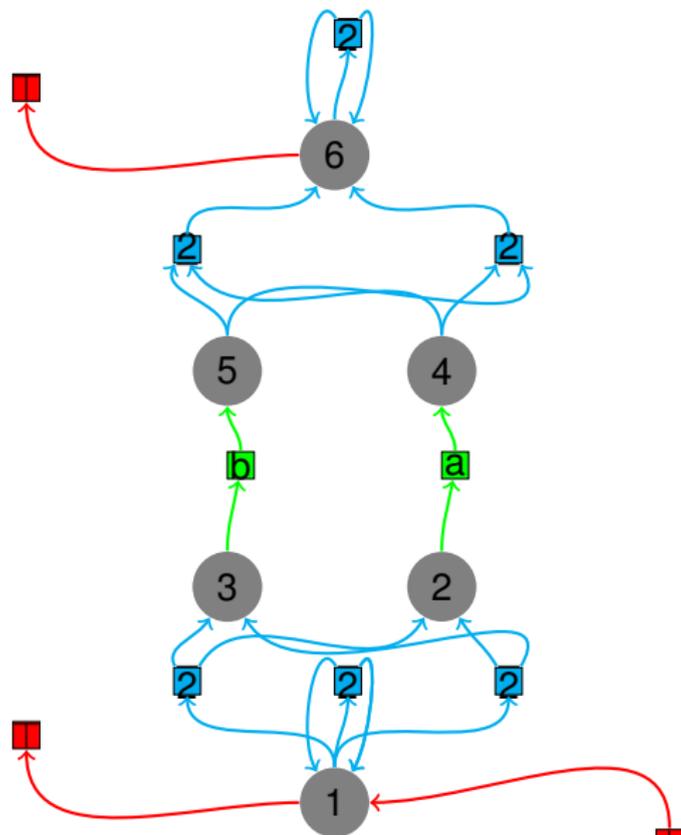
$$\Sigma(Q) = \left\{ \begin{array}{c} q_1 q_2 \cdots q_k \\ \quad \backslash \quad / \\ \quad \quad a \end{array} : k \in \mathbb{N}, a \in \Sigma^{(k)}, q_1, \dots, q_k \in Q \right\}.$$

- ▶ $F \subseteq Q$ l'ensemble des états finaux.



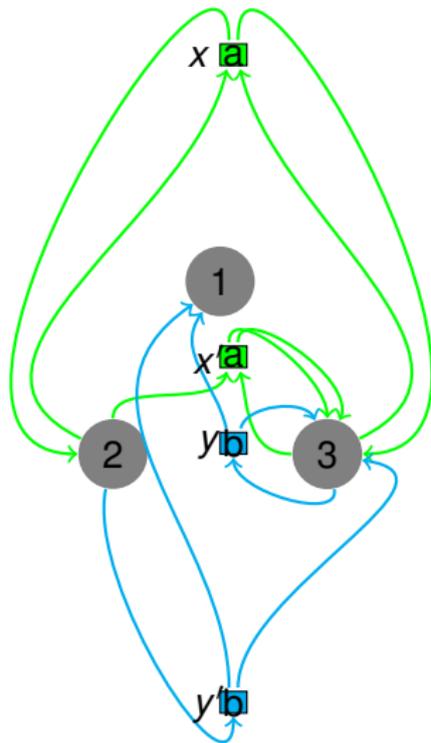
Exemple 3: Automates et PROs

Automates branchants



Exemple 3: Automates et PROs

Automates de Circuits?



Exemple 3: Automates et PROs

Questions

- ▶ Comment définir correctement une notion d'automates sur un PRO?
- ▶ Rationalité de l'union et de l'intersection (somme et produit de Hadamard)
- ▶ Quelles sont les opérations rationnelles?
- ▶ Peut-on définir des ensembles reconnaissables de circuits quantiques?
- ▶ Quid des transductions?