Une introduction à la combinatoire analytique. Utilisation en apprentissage profond

J. Lapuyade-Lahorgue

22-02-2024

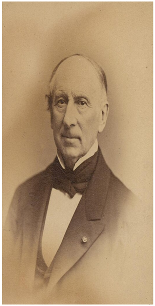
Plan

Son principal contributeur: Philippe Flajolet

1948-2011, membre de l'académie des sciences en 1993, médaille d'argent du CNRS en 2004, prix Leroy P. Steele en 2019 à titre posthume.

Ses influences

Euler



Cauchy

Riemann

Polya

Ramanujan

Principe de la combinatoire analytique

Exprimer un problème combinatoire comme les coefficients d'une fonction analytique.

Fonction analytique: Une fonction d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est dite analytique en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un $R > 0$ (éventuellement infini) tel que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \times (z - z_0)^n$$

lorsque $|z - z_0| < R$. Le plus grand R tel que f soit analytique s'appelle le **rayon de convergence de f en z_0**.

Intérêt: Le comportement asymptotique du problème combinatoire est lié à la valeur du rayon de convergence. De plus, certaines formules combinatoires sont difficiles à trouver autrement.

Quelques exemples de problèmes combinatoires

- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments, il y en a $n!$. Pas besoin de combinatoire analytique, la formule de Stirling suffit.
- Le nombre de partitions d'un entier (par exemple: $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ a trois partitions). Formule difficile à obtenir autrement que par la combinatoire analytique. La formule trouvée nous donne un algorithme de complexité quadratique.
- Le nombre d'arbres planaires et d'arbres non planaires, non étiquettés ou étiquettés.
- Le nombre de graphes à isomorphisme près (non étiquetté) en combinant avec la théorie de Polya.

Classe combinatoire non étiquettée (ou ordinaire) (1)

C'est un ensemble $\mathcal{A}$ au plus dénombrable muni d'une fonction:

$$|.| : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$$

telle que chaque $n \in \mathbb{N}$ a un **nombre fini** d'antécédents. $|a|$ est appelé la taille de a.
Une classe combinatoire ordinaire est représentée par **la fonction génératrice ordinaire:**

$$A(z) = \sum_{a \in \mathcal{A}} z^{|a|} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où a_n est le nombre d'objets de taille n. On notera aussi $[z^n]A(z)$ le coefficients de degré n.

Classe combinatoire non étiquettée (ou ordinaire) (2)

Dans la définition précédente, A n'est pas forcément analytique en 0. On dit qu'une classe combinatoire ordinaire est **constructible** si A est **analytique en** 0.

- La classe des permutations n'est pas une classe ordinaire constructible.
- Une classe est constructible si et seulement si:

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < +\infty$$

Construction itérative de classes combinatoires (1)

- **La classe neutre:** $\mathcal{E} = \{\epsilon\}$, où ϵ de taille 0. Sa FGO est $E(z) = 1$.
- **La classe atomique:** $\mathcal{Z} = \{z\}$, où z de taille 1. Sa FGO est $Z(z) = z$.
- **Produit de classes:** Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux classes combinatoires, alors $\mathcal{B} \times \mathcal{C} = \{(b, c) : b \in \mathcal{B}, c \in \mathcal{C}\}$. $|(b, c)| = |b| + |c|$ de façon à ce que la FGO soit $B(z) \times C(z)$.
- **Somme de classes:** Ce n'est pas la réunion, car sinon la FGO ne serait pas égale à la somme. C'est $\mathcal{B} + \mathcal{C} = (\mathcal{B} \times \{\epsilon_{\mathcal{B}}\}) \cup (\mathcal{C} \times \{\epsilon_{\mathcal{C}}\})$ où $\epsilon_{\mathcal{B}} \neq \epsilon_{\mathcal{C}}$ sont deux objets de taille nulle.

Construction itérative de classes combinatoires (2)

Séquences: Soit $\mathcal{B}$ une classe combinatoire. La classe $\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B})$ est l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathcal{B}$.
Il faut $B(0) = 0$ car sinon il y aurait une infinité de suites de même taille.
On a:

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \dots$$

Ainsi:

$$A(z) = 1 + B(z) + B(z)^2 + \dots = \frac{1}{1 - B(z)}$$

Construction itérative de classes combinatoires (3)

Parties finies: La classe $\mathcal{A} = \mathrm{SET}(\mathcal{B})$ est l'ensemble des parties finies de $\mathcal{B}$. Il faut également $B(0) = 0$ car sinon A n'est pas analytique. On a:

$$\mathcal{A} = \prod_{\beta \in \mathcal{B}} (\{\epsilon\} + \{\beta\})$$

$$\begin{aligned} A(z) &= \prod_{\beta \in \mathcal{B}} \left(1 + z^{|\beta|}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z^n)^{b_n} \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \log(1 + z^n)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^{nk}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} B(z^k)\right) \end{aligned}$$

Construction itérative de classes combinatoires (4)

Multiensembles: La classe $\mathcal{A} = \mathrm{MSET}(\mathcal{B})$ est comme la classe des séquences sauf que l'ordre n'a pas d'importance. De même $B(0) = 0$.

$$\mathcal{A} = \prod_{\beta \in \mathcal{B}} \mathrm{SEQ}(\{\beta\})$$

Ainsi, par le même raisonnement que pour SET:

$$\begin{aligned} A(z) &= \prod_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{1}{1 - z^{|\beta|}} \\ &= \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - z^n)^{-b_n} \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B(z^k)}{k} \right) \end{aligned}$$

Construction itérative de classes combinatoires (5)

Cycles: La classe $\mathcal{A} = \mathrm{CYC}(\mathcal{B})$ est la réunion $\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{CYC}_n(\mathcal{B})$ où $\mathrm{CYC}_n(\mathcal{B})$ est le quotient de la classe des séquences à n éléments par la relation d'équivalence:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ssi il existe $\sigma \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $y_i = x_{\sigma(i)}$. Par la théorie de Polya:

$$A(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - B(z^k)},$$

où $\varphi(k)$ est le nombre de nombres $\leq k$ et premiers avec k.

Classes combinatoires itérativement constructibles

Une classe combinatoire est dite **itérativement constructible** si elle est construite en un nombre fini d'étapes à partir de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ et en utilisant les opérateurs $+$, $\times$, SEQ, SET, MSET et CYC.

Résultat que l'on prouvera plus tard: Une classe itérativement constructible est constructible; c.a.d sa FGO est une fonction analytique.

Exemples (1)

Compositions d'entiers: 0 (1 comp.), 1 (1 comp.), $2 = 1 + 1$ (2 comp.), $3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$ (4 comp.).
C'est la classe:

$$\mathcal{C} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{I}),$$

où $\mathcal{I}$ est la classe des entiers strictement positifs de FGO $I(z) = \dfrac{z}{1-z}$.
Ainsi:

$$C(z) = \frac{1-z}{1-2z}$$

En développant, on trouve: $c_0 = 1$, $c_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Exemples (2)

Partitions d'entiers: 0 (1 part.), 1 (1 part.), $2 = 1 + 1$ (2 part.), $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ (3 part.), $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ (5 part.). C'est aussi le nombre d'orbites de l'action de S_n sur lui-même par conjugaison.
C'est la classe:

$$\mathcal{P} = \mathrm{MSET}(\mathcal{I}),$$

Ainsi:

$$P(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{+\infty} z^{nk}\right)$$

En prenant le logarithme puis en dérivant, on trouve la relation de récurrence:

$$np_n = \sigma(1)p_{n-1} + \sigma(2)p_{n-2} + \ldots + \sigma(n)p_0,$$

où $\sigma(k)$ est la somme des diviseurs de k.

Construction récursive des classes

On dit que la construction est récursive si la classe s'appelle elle-même dans sa construction. Ainsi, sa FGO vérifie une équation fonctionnelle du type:

$$A(z) = \eta(A(z))$$

Un certain cas est sous certaines conditions facile à résoudre:

$$A(z) = z\phi(A(z))$$

si certaines conditions sont respectées, A est analytique et:

$$a_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n$$

Exemple: arbres planaires

C'est la classe construite récursivement par:

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times \mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$$

Ainsi:

$$A(z) = \frac{z}{1 - A(z)}$$

Comme $A(0) = 0$, en résolvant une équation du second degré, on a:

$$A(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

En développant, on trouve $a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$

Exemple: arbres non planaires

C'est la classe construite récursivement par:

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times \mathrm{MSET}(\mathcal{A})$$

Ainsi:

$$A(z) = z \times \exp\left(A(z) + \frac{A(z^2)}{2} + \frac{A(z^3)}{3} + \ldots\right)$$

En prenant la dérivée logarithmique, on a la relation de récurrence:

$$(n-1)a_n = \sigma_A(1)a_{n-1} + \ldots + \sigma_A(n-1)a_1,$$

où

$$\sigma_A(k) = \sum_{d|k} d a_d$$

Rappels de théorie des groupes (1)

Soit G un groupe et X un ensemble. Une **action** (appelée aussi **opération**) de G sur X est une fonction de $G \times X$ dans X qui à un couple (g, x) associe un élément $g.x \in X$ telle que:

1. $e.x = x$ pour tout x.
2. $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$ pour tous g_1, g_2, x.

Soit x un élément de X et g un élément de G:

- $Gx = \{g.x : g \in G\}$ est **l'orbite** de x sous l'action de G.
- $S_x = \{g \in G : g.x = x\}$ est le **stabilisateur** de x.
- $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : g.x = x\}$ est l'ensemble des points fixes de g.

Rappels de théorie des groupes (2)

Si G et X sont finis, alors:

- Les orbites Gx forment une partition de X, c.a.d: $x \in Gx$ et si $Gx \neq Gy$, alors $Gx \cap Gy = \emptyset$. Une **transversale** Z de l'action est un sous-ensemble de X formé d'un représentant de chaque orbite. On a donc:
$$|X| = \sum_{x \in Z} |Gx|$$
- On a $|G| = |Gx| \times |S_x|$ ainsi:
$$|X| = \sum_{x \in Z} \frac{|G|}{|S_x|}$$
- On a: $|Z| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$ (Théorème de Burnside).

Polynôme indicateur de cycles

Lorsque un groupe fini G agit sur un ensemble fini X à n éléments; alors pour g fixé, la fonction $x \to g.x$ est une bijection de X sur lui-même, c'est une **permutation**, c.a.d un élément de S_n.
Toute permutation se décompose en cycles à support disjoint. Le **polynôme indicateur de cycles** de l'action de G sur X est défini par:

$$Z_G(T_1, \ldots, T_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} T_i^{\alpha_i(g)},$$

où $\alpha_i(g)$ est le nombre de cycles de longueur i (en comptant également les points fixes) dans la factorisation de $x \to g.x$.

Théorème de Polya

Soit G groupe fini opérant sur un ensemble fini X à n éléments. Soit $\mathcal{B}$ une classe combinatoire de FGO $B(z)$.

- **Coloriage:** Un coloriage de X est une fonction de X vers $\mathcal{B}$.
- **Taille d'un coloriage:** Soit ψ un coloriage, sa taille est définie par: $|\psi| = \sum_{x \in X} |\psi(x)|$.
- **Action sur l'ensemble des coloriages:** L'action de G sur X induit une action de G sur $\mathcal{B}^X$ définie par $g.\psi(x) = \psi(g^{-1}.x)$.
- **FGO des orbites de l'action sur l'ensemble des coloriages:** Si $\psi_2 = g.\psi_1$, alors $|\psi_2| = |\psi_1|$. Soit Z une transversale de l'action, on définit la FGO $W(z) = \sum_{\psi \in Z} z^{|\psi|}$.
- **Théorème de Polya:** $W(z) = Z_G(B(z), B(z^2), \ldots, B(z^n))$, où Z_G est le polynôme indicateur de cycles de l'action de G sur X.

Applications de Polya: les cycles

On commence par calculer la FGO de la classe $\mathrm{CYC}_n(\mathcal{B})$ des cycles à n éléments.

- On prend $X = \{1, \ldots, n\}$, ainsi l'ensemble des coloriages de X correspond à $\mathrm{SEQ}_n(\mathcal{B})$.
- On prend $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'action de G sur X est définie par $k.l \equiv k + l \pmod{n}$. On remarque alors que deux coloriages sont dans la même orbite s'ils correspondent au même cycle.
- Le polynôme indicateur de cycles de cette action est:

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) T_d^{\frac{n}{d}}$$

En appliquant le théorème de Polya et en sommant toutes les FGO, on retrouve la FGO de $\mathrm{CYC}(\mathcal{B})$.

Applications de Polya: les graphes non étiquettés

Par définition, deux graphes non étiquettés finis (V, E) et (V', E') sont égaux s'ils sont isomorphes, c.a.d: il existe une permutation σ de $V = V'$ telle que $(u, v) \in E$ ssi $(\sigma(u), \sigma(v)) \in E'$. On procède comme suit:

- Soit s le nombre de sommets. X est l'ensemble des paires de sommets, ainsi $n = \frac{s(s-1)}{2}$.
- $\mathcal{B} = \{\epsilon, z\}$ et un coloriage de X associe ϵ pour une paire sans arêtes et z pour une paire avec arêtes. La taille d'un coloriage est alors le nombre d'arêtes.
- On prend $G = S_s$ et l'action de G sur X est l'action sur les paires induites par celle sur les singletons (les sommets). Deux graphes sont isomorphes s'ils sont dans la même orbite par l'action sur les coloriages.

Exemple: graphes à 5 sommets

On a 10 paires et le polynôme indicateur de cycles est:

$$\frac{1}{120}\times\left(T_1^{10}+10\,T_2^3\,T_1^4+15\,T_1^2\,T_2^4+20\,T_1\,T_3^3+20\,T_1\,T_3\,T_6+30\,T_2\,T_4^2+24\,T_5^2\right.$$

En utilisant le théorème de Polya, on trouve:

$$W(z)=z^{10}+z^9+2z^8+4z^7+6z^6+6z^5+6z^4+4z^3+2z^2+z^1+1$$

Par exemple, il y a 4 graphes à 7 arêtes et 6 graphes à 6 arêtes.

Définition

Une classe combinatoire étiquettée est une classe combinatoire dont les éléments de taille n sont des graphes non orientés à n sommets. De plus, si $\mathcal{G} = (V, E)$ est un objet de taille n, il existe une fonction:

$$e : V \to \{1, \ldots, n\}$$

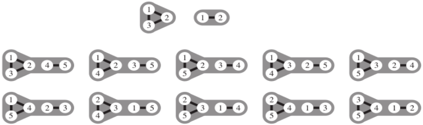
bijective.
Une classe combinatoire étiquettée est représentée par une fonction génératrice exponentielle (FGE):

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

Construction itérative des classes indexées (1)

Classes neutre, atomique et somme combinatoire: $\mathcal{E} = \{\epsilon\}$ $(E(z) = 1)$, $\mathcal{Z} = \{①\}$ $(Z(z) = z)$, $\mathcal{B} + \mathcal{C} = (\mathcal{B} \times \{\epsilon_{\mathcal{B}}\}) \cup (\mathcal{C} \times \{\epsilon_{\mathcal{C}}\})$ $(B(z) + C(z))$.

Produit combinatoire: Plus subtil:



On doit ré-étiquetter de façon à respecter l'ordre.

Construction itérative des classes indexées (2)

Produit combinatoire: Soit $(b, c) \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ de taille $n = n_1 + n_2$ avec $n_1 = |b|$ et $n_2 = |c|$. Il y a $\left(\begin{array}{c} n \\ n_1 \end{array} \right) = \frac{n!}{n_1!n_2!}$ ré-étiquetages. Soit $b * c$ l'ensemble des objets issus de (b, c) après ré-étiquetage.
On pose:

$$\mathcal{B} * \mathcal{C} = \bigcup_{(b,c)\in\mathcal{B}\times\mathcal{C}} b * c$$

On a $B(z) \times C(z)$.

Construction itérative des classes indexées (3)

Séquences: $\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B})$ défini par:

$$\mathcal{E} + \mathcal{B} + \mathcal{B} * \mathcal{B} + \dots$$

ainsi:

$$A(z) = 1 + B(z) + B(z)^2 + \dots = \frac{1}{1 - B(z)}$$

Construction itérative des classes indexées (4)

Parties finies et cycles: Le produit ne passe pas à l'infini. On part de $\mathcal{A}_k^{\mathrm{SEQ}} = \mathrm{SEQ}_k(\mathcal{B})$ de FGE $B(z)^k$. Ainsi:

- **Parties finies:** Pour $k \geq 0$, si $\mathcal{A}_k = \mathrm{SET}_k(\mathcal{B})$, alors $A_k(z) = \frac{B(z)^k}{k!}$ donc si $\mathcal{A} = \mathrm{SET}(\mathcal{B})$ alors $A(z) = \exp(B(z))$.
- **Cycles:** De même si $k \geq 1$ et si $\mathcal{A}_k = \mathrm{CYC}_k(\mathcal{B})$, alors $A_k(z) = \frac{B(z)^k}{k}$. Donc si $\mathcal{A} = \mathrm{CYC}(\mathcal{B})$, alors $A(z) = \log \frac{1}{1-B(z)}$.

Exemples

- **Permutations:** C'est $\mathcal{P} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{Z})$. En effet,
$$P(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n!} z^n.$$
On a aussi $\mathcal{P} = \mathrm{SET}(\mathrm{CYC}(\mathcal{Z}))$, en effet $\frac{1}{1-z} = \exp \log \frac{1}{1-z}$. C'est une façon analytique de monter qu'une permutation se factorise en cycles à support disjoint.
- **Permutations se factorisant en un nombre k de cycles:**
$$\mathcal{P}_k = \mathrm{SET}_k(\mathrm{CYC}(\mathcal{Z})) \text{ de FGE } P_k(z) = \frac{1}{k!}\left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k.$$
$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = n![z^n]P_k(z)$ est le nombre de permutations de taille n ayant k cycles (points fixes compris) dans sa factorisation. Safisfait la relation de récurrence:
$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right] + (n-1)\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]$$

Fonction analytique

Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est **analytique** en z_0 s'il existe un $R > 0$ tel que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour $|z - z_0| < R$.
Le plus grand R est le **rayon de convergence**.

Calcul du rayon de convergence

Le rayon de convergence se calcule par:

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

ou si le calcul le permet par:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Interprétation du rayon de convergence

Posons $K = \frac{1}{R}$. Par définition de la limite-sup, on a: pour tout $\epsilon > 0$:

- $(K - \epsilon)^n < |a_n|$ se produit une infinité de fois.
- $|a_n| < (K + \epsilon)^n$ se produit à partir d'un certain rang n.

Ainsi $a_n = K^n \theta(n)$, où pour tout $\epsilon > 0$:

- $(1 - \epsilon)^n < |\theta(n)|$ se produit une infinité de fois.
- $|\theta(n)| < (1 + \epsilon)^n$ se produit à partir d'un certain rang n.

θ est la contribution sous-exponentielle du comportement asymptotique de a_n.

Deux propositions connues et utiles

Proposition

Toute fonction analytique en z_0 et de rayon de convergence $R > 0$ est analytique en tout point du disque de convergence.

Théorème de Pringsheim

Toute fonction analytique en 0, à coefficients positifs dans son développement en série entière et de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ a R comme singularité (cad. n'est pas analytique en R). De plus R est la plus petite singularité sur l'axe des réels positifs.

Analycité des FG de classes construites itérativement: cas étiquetté (1)

Pour une classe $\mathcal{A}$, on notera $\rho_{\mathcal{A}}$ le rayon de convergence et $\tau_{\mathcal{A}} = \lim_{x \to^{<} \rho_{\mathcal{A}}} A(x)$.

- **Classe neutre:** $\mathcal{E} = \{\epsilon\}$ de FGE $E(z) = 1$: $\rho_{\mathcal{E}} = \infty$ et $\tau_{\mathcal{E}} = 1$.
- **Classe atomique:** $\mathcal{Z} = \{①\}$ de FGE $Z(z) = z$: $\rho_{\mathcal{Z}} = \infty$ et $\tau_{\mathcal{E}} = \infty$.
- **Autres classes finies:** $\rho_{\mathcal{A}} = \infty$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
- **Classes infinies:** On va montrer par récurrence que $\rho_{\mathcal{A}} \in]0, \infty]$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.

Analycité des FG de classes construites itérativement: cas étiquetté (2)

- **Somme combinatoire, produit combinatoire:** C'est le minimum des deux rayons de convergence.
- **Séquences:** $\mathcal{A} = \mathrm{SEQ}(\mathcal{B})$ donc $A(z) = \dfrac{1}{1 - B(z)}$ avec $B(0) = 0$ et B non constant. $\tau_{\mathcal{B}} = \infty$. Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\beta \in]0, \rho_{\mathcal{B}}[$ tel que $B(\beta) = 1$. β est la première singularité sur l'axe des réels positifs de A. Ainsi par Pringsheim, $\rho_{\mathcal{A}} = \beta$ où β unique solution de $B(\beta) = 1$. On a $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
- **Parties finies:** $\mathcal{A} = \mathrm{SET}(\mathcal{B})$ donc $A(z) = \exp(B(z))$ avec $B(0) = 0$ et B non constant. $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{B}}$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
- **Cycles:** Même démarche que pour les séquences.

Analycité des FG de classes construites itérativement: cas classique (1)

- **Classes neutre, atomique, somme et produit et autres classes finies:** Même chose que dans le cas étiquetté.
- **Classe infinie:** On a $A(1) = \infty$ (les coefficients du DSE sont des entiers non nuls sauf un nombre fini). Ainsi $\rho_{\mathcal{A}} \leq 1$. On va montrer par récurrence que $\rho_{\mathcal{A}} \in]0, 1]$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
- **Séquences:** Même chose que dans le cas étiquetté.

Analycité des FG de classes construites itérativement: cas classique (2)

- **Multiensembles:** $A(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - z^n)^{-b_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B(z^k)}{k}\right)$.

  Premier cas: $\mathcal{B}$ finie. B polynôme non constant $B(z) = \sum_{j=1}^{m} b_j z^j$. La première singularité de A est 1 donc $\rho_{\mathcal{A}} = 1$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
  Deuxième cas: $\mathcal{B}$ infinie. On a $A(z) = \exp(B(z)) \times \exp\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{B(z^k)}{k}\right)$. $\exp(B(z))$ a le même rayon de convergence que B. Comme $0 < \rho_{\mathcal{B}} \leq 1$, $B(0) = 0$ et $\tau_{\mathcal{B}} = \infty$. Pour tout $r < \rho_{\mathcal{B}}$, on montre facilement qu'on a convergence uniforme de la somme sur $[0, r]$. Donc $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{B}}$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.

Analycité des FG de classes construites itérativement: cas classique (3)

- **Parties finies:** Similaire aux multiensembles
  Premier cas: $\mathcal{B}$ finie. Dans ce cas $\mathcal{A}$ est finie donc $\rho_{\mathcal{A}} = \infty$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
  Deuxième cas: $\mathcal{B}$ infinie. $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{B}}$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.
- **Cycles:**
  Premier cas: $\mathcal{B}$ finie. $\rho_{\mathcal{A}} = \beta$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$, où β l'unique solution de $B(\beta) = 1$.
  Deuxième cas: $\mathcal{B}$ infinie. $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{B}}$ et $\tau_{\mathcal{A}} = \infty$.

Holomorphie

Une fonction f de $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est **holomorphe** en z_0 s'il existe un $R > 0$ tel que f soit $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque ouvert $D(z_0, R) \subset \Omega$.

Théorème fondamental de l'analyse complexe et formule de Cauchy

Un fonction est analytique en z_0 si et seulement si elle est holomorphe en z_0. Dans ce cas:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

où γ est un lacet simple dans le domaine d'analycité et entourant z_0.

Méromorphie, pôle et résidu

Une fonction f est **méromorphe** en z_0 si c'est un quotient de deux fonctions holomorphes en z_0.
Un point z_0 est **pôle** de f d'ordre n si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ dans un voisinage de z_0 dans lequel g est holomorphe et $g(z_0) \neq 0$.
Soit z_0 pôle de f d'ordre n. Le coefficient a_{n-1} du DSE $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ s'appelle le **résidu** de f en z_0. On le note $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

Théorème des résidus

Théorème des résidus

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert simplement connexe Ω et γ un lacet tels que f n'ait qu'un nombre fini de pôles à l'intérieur de γ et tel que f soit analytique sur γ, alors:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_i \in P_\gamma} \mathrm{Ind}(\gamma, z_i) \times \mathrm{Res}(f, z_i),$$

où P_γ est l'ensemble des pôles à l'intérieur de γ et $\mathrm{Ind}(\gamma, z_i)$ est le nombre de tours que fait γ autour de z_i.

Conséquence du théorème des résidus: le principe de l'argument

Principe de l'argument

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert simplement connexe Ω et γ un lacet simple tels que f ne s'annule pas sur γ, alors:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)z^k}{f(z)}dz = \sum_{z_i \in Z_\gamma \cup P_\gamma} \nu(z_i) z_i^k,$$

où Z_γ (resp. P_γ) est l'ensemble des zéros (resp. pôles) à l'intérieur de γ et $\nu(z_i)$ est l'ordre du zéro (>0) ou pôle (<0).

Preuve: Appliquer le théorème des résidus à $\frac{f'(z)}{f(z)}z^k$.

Conséquence du principe de l'argument: le théorème d'inversion locale

Théorème d'inversion locale (1)

Soit ψ une fonction analytique en y_0 et soit $z_0 = \psi(y_0)$. Si $\psi'(y_0) \neq 0$, alors il existe une unique fonction analytique y en z_0 telle que $y(z_0) = y_0$ et $\psi(y(z)) = z$.

Théorème d'inversion locale (2)

Soit ψ une fonction analytique en y_0 et soit $z_0 = \psi(y_0)$. On suppose $\psi'(y_0) = 0$ et $\psi''(y_0) \neq 0$, alors il existe un ouvert Ω_z de z_0 et deux fonctions y_1 et y_2 analytique sur un ouvert fendu $\Omega_z^{\setminus\theta} = \{z \in \Omega_z : \arg(z - z_0) \in]\theta - \pi, \theta + \pi[\}$, continues sur Ω_z, non analytiques en z_0 telles que $\psi(y_i(z)) = z$.

Preuve: Voir le livre de P. Flajolet, page

Analycité des FG: classes construites récursivement

C'est une conséquence des théorèmes d'inversion locale.

Proposition

Soit ϕ une fonction analytique en 0 dont les coefficients du DSE en 0 sont positifs et telle que $\phi(0) \neq 0$ et de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. On suppose que: $\lim_{x \to R} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} > 1$

1. Il existe un $\tau \in]0, R[$ tel que $\frac{\tau\phi'(\tau)}{\phi(\tau)} = 1$.
2. Il existe une fonction analytique y en 0 telle que $y(z) = z\phi(y(z))$. De plus, les coefficients de son DSE sont positifs et donnés par $[z^n]y(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n$.
3. Le rayon de convergence de y est $r = \frac{\tau}{\phi(\tau)} = \frac{1}{\phi'(\tau)} < +\infty$.

Exemple: cas des arbres planaires

On avait $A(z) = \dfrac{z}{1 - A(z)}$ ainsi $\phi(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Le rayon de convergence de ϕ est 1 et on a bien

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to 1-} \frac{x}{1-x} = +\infty > 1.$$

En résolvant $\dfrac{\tau\phi'(\tau)}{\phi(\tau)} = 1$, on trouve $\tau = \frac{1}{2}$ et donc $r = \frac{1}{4}$.

Le comportement asymptotique des a_n est $a_n = 4^n\theta(n)$.

En comparaison, la formule de Stirling donne: $a_n \sim 4^n \times \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n\sqrt{n-1}}$.

On retrouve bien que $\theta(n) \sim \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n\sqrt{n-1}}$ est sous-exponentiel.

Autres résultats asymptotiques

- **Ce qu'on a fait:** Calculer le nombre K (dans le cas où le rayon de convergence est fini) pour établir $a_n = K^n \theta(n)$.
- **Autres résultats issus de l'ouvrage de P. Flajolet:**
  - Le cas où $R = \infty$: dans ce cas a_n tend vers 0 plus vite que n'importe quelle exponentielle.
  - Trouver des équivalents $a_n \sim f(z)$. Différentes méthodes sont proposées; par exemple la méthode des points selles (dû à P. Flajolet).
  - Cas où ni les coefficients ne sont explicitables (relation de récurrence) ni la fonction génératrice.
  - **Cas multivarié:** Dans lequel d'autres modalités que la taille des objets sont considérées (par exemple: nombre de composantes).
  - **Cas probabiliste:** Lorsque les coefficients d'une FG sont des probabilités plutôt que des cardinaux, quitte à remplacer z par it, on retrouve les fonctions caractéristiques de lois de probabilité.

Perspectives, différentes pistes

- Possibilité d'apprentissage des FG ? Vérité terrain: le nombre d'objets vérifiant telle propriété indexée par un entier.
- Etude de la complexité algorithmique des GNN au moins pour certains types de graphe (on sait qu'en général, le pb d'isomorphisme entre graphes est NP-complet; mais on pourrait étudier pour quelle famille de graphes suffisamment large, nous avons une complexité raisonnable). Le comportement asymptotique des coefficients des FG nous renseigne sur la complexité algorithmique.
- Etude de la complexité de réseaux de neurones pour d'autres types de données que les graphes.
- Autres propositions ?

Merci pour votre attention